



TITLE:

# Nonlinearity and Fluctuations in Laser Action

AUTHOR(S):

川崎, 辰夫

---

CITATION:

川崎, 辰夫. Nonlinearity and Fluctuations in Laser Action. 物性研究  
1968, 10(5): E37-E46

ISSUE DATE:

1968-08-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/86726>

RIGHT:

# Nonlinearity and Fluctuations in Laser Action

京大理 川崎辰夫

レーザー発振動作に対するミクロな立場からの研究はその物理的側面を Haken group が精力的に行い、(文献 H series) その統計力学的な背景、数学的なより一般的な側面を Lax (文献 L) らが行うことにより、ほぼその全容が明らかにされたと考えられる。

ここでは研究会のテーマに従い、発振されたレーザー光の場の非線型なふるまい及びゆらぎに焦点をあわせて次の二つの点に話を限った。光子場の phase fluctuation spectrum を

$$S_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle b^+(t) b(0) \rangle \quad (1)$$

Intensity fluctuation spectrum を

$$S_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \{ \langle b^+(0) b^+(t) b(t) b(0) \rangle - \langle b^+ b \rangle^2 \} \quad (2)$$

と定義すると実験的には次のことがわかっている (文献 E series を参照)

$$[A] \quad S_p(\omega) \approx \frac{2\bar{\rho}A_p}{A_p^2 + \omega^2} \quad (3)$$

$$A_p \propto P \quad \text{below and above threshold} \quad (4)$$

即ち位相のゆらぎは入力 P がますと小さくなり光はますます coherent になることを表す

$$[B] \quad S_a(\omega) \approx \frac{2\langle(\Delta\rho)^2\rangle A_a}{A_a^2 + \omega^2} \quad (5)$$

$$A_a \propto \frac{1}{P} \quad \text{below threshold} \quad (6)$$

$$\propto P \quad \text{above threshold} \quad (7)$$

$S_p(0)$  と  $S_a(0)$  を比較すると threshold において 5 : 1 位の大ききさで

phase fluctuation の強度は殆んど phase のゆらぎだけできまる。

〔C〕  $\bar{\rho} A_p$  は  $P$  の増加と共に 2 から 1 へと連続的に移行する。変化は殆んど threshold 近傍でのみおこる。(ここに  $\bar{\rho}$  は  $\langle b^+ b \rangle$  である)

以上の事実を導くモデルとしては光学的活性原子と光子場とからなる系が考える。その環境からうける Random 力の下での光子場の振舞を追求すればよい。(H-3, )

原子に関する変数を, 光子場の時間変化に対して adiabatic に従うとして消去し (H-4, L-14) 光子場を適当にスケールしなおして書き下すと

$$\dot{B}^+ - (P - |B|^2) B^+ = K(t) \quad (8)$$

という Normalized Rotating Wave Van der Pol 方程式になる。

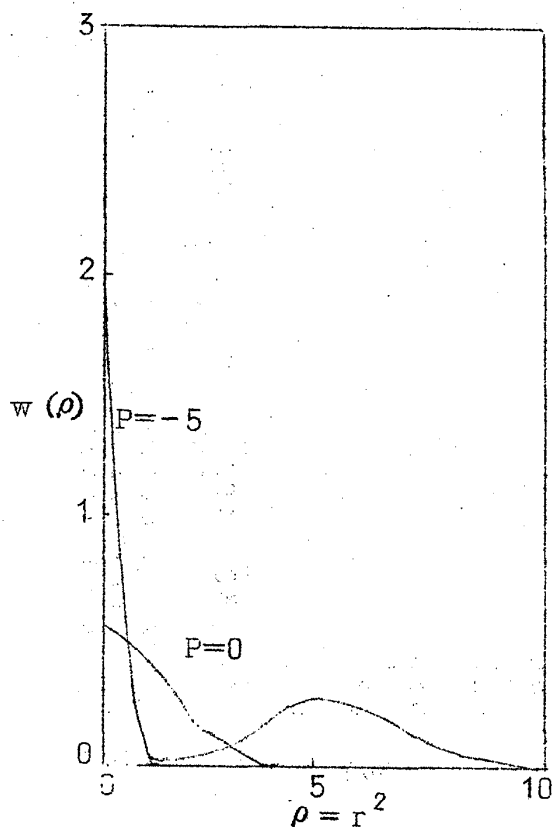
(H-4, 10, 12, L-5, 6, 14) これは正しく  $K(t)$  という Random 力を持つ非線型ランジュバン方程式である。 $P$  は oscillator のレベルを与える量である。 $K(t)$  の由来は一つは光子場の熱浴によるゆらぎ, 二つは原子が光子を放出吸収することによるゆらぎでレーザーの場合には後者からの寄与が圧倒的である。 $B^+$  は量子論的な演算子であるがそれから構成される関数の平均値は古典的な演算子の平均値に一対一対応がつくことが示せる (L-14, 15) ので (8) 式を古典的なものとして取扱ってよい。Van der Pol 方程式は Self-Sustained Oscillator の一種と考えられ (L-5) 自ら動作点をきめる機構を内蔵している点が普通の非線型微分方程式とは異なる特徴である。

(8) 式に associated な Fokker - Planck 方程式を導き (H-7, 13, 14, 15, L-4, 5, 6, 14, 15) 数値解析によって結果を得る。 $B^+ = r e^{i\varphi}$  として確率分布  $P$  の従う式は

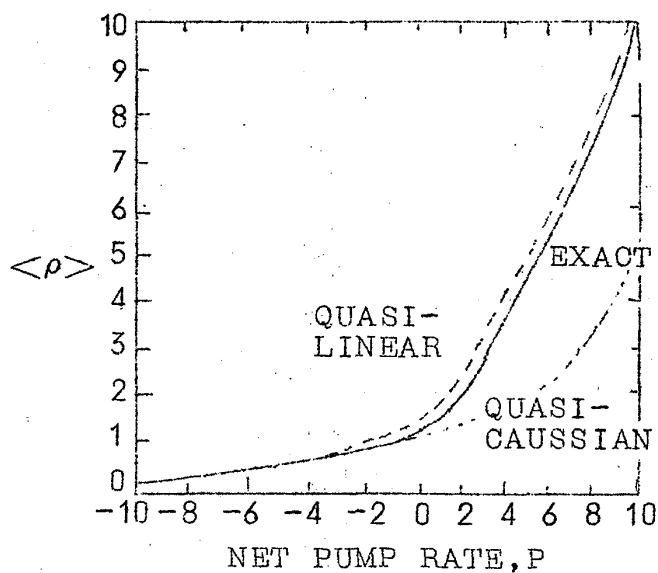
$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( r^3 - Pr - \frac{1}{r} \right) P \right] + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \quad (9)$$

結果を図示すると (H-7, 13, L-6, 14)

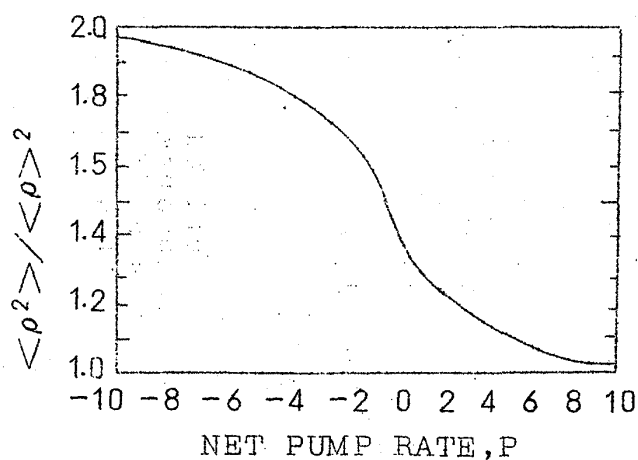
# Nonlinearity and Fluctuations



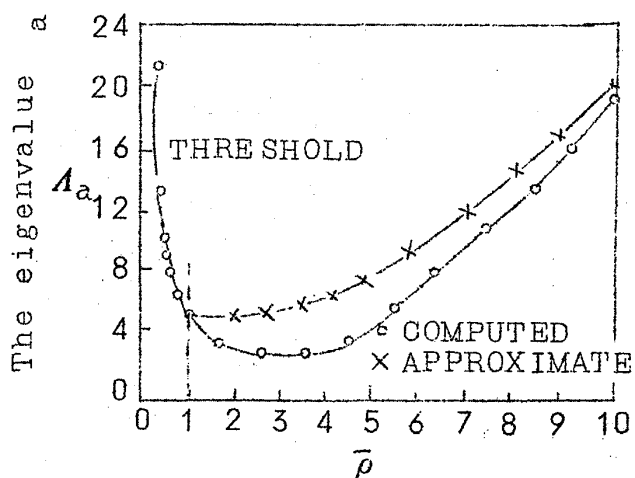
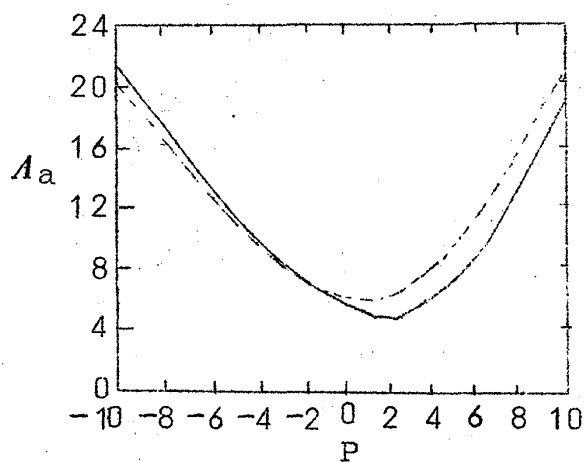
The steady-state photon probability distribution function

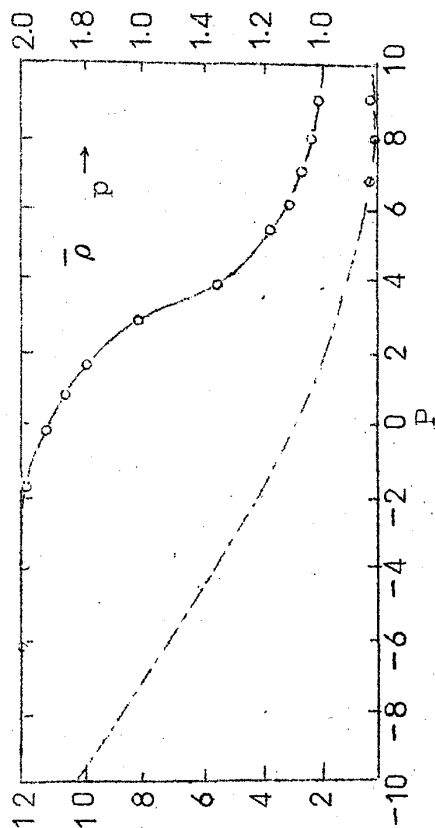


The steady-state mean number of quanta  $\langle \rho \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$

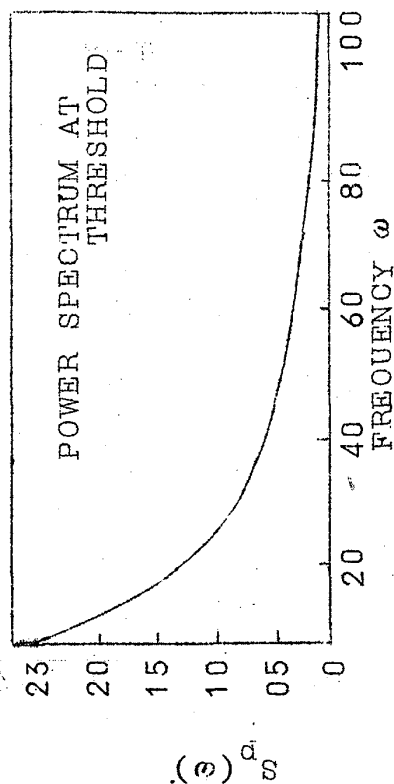
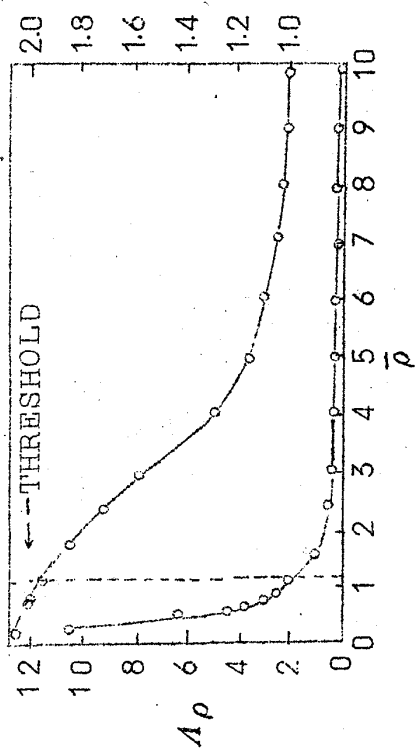


Normalized second factorial moment

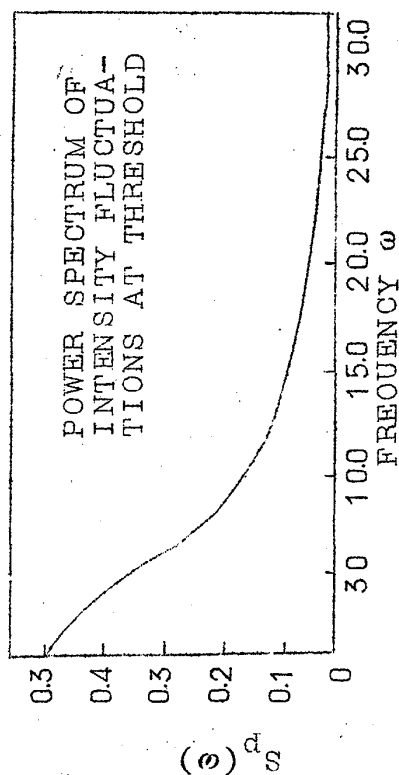




The halfwidth  $\Delta\rho$  for the combined amplitude and phase fluctuations for a tuned homogeneously broadened laser is plotted versus  $P$ . We also show  $(\rho)\Delta\rho$  which varies from 2 below threshold to 1 above threshold.



Power spectrum for phase and amplitude fluctuations  $S_p(\omega)$  for the NRWVP oscillator at threshold ( $\rho=0$ )



Power spectrum for amplitude (intensity) fluctuations  $S_0(\omega)$  for the NRWVP oscillator at threshold ( $\rho=0$ )

今後の問題としては Laser Action よりむしろレーザー光を用いた物性に重点を置いて考えるのが妥当な方向 (self-focusing, filamentation, superradiation, transparency 等) と思われる。その際ここで扱われたような原子と光子とからなる系の Dynamics (或はランジュバンの取扱いといった方が正確だろう) はお手本として知る値打ちがあるものとする。

以上は全くの素人書いた Review 及見解だと思ってほしい。以下に文献リストを掲げる。

# References

- E-1 Interferometry of the Intensity Fluctuations in Light
  - I. Basic Theory; the Correlation between Photons in Coherent Beams of Radiation, Proc. Roy. Soc. A 242 (1957) 300
  - II. An Experimental Test of the Theory for Partially Coherent Light, Proc. Roy. Soc. A 243 (1957) 291
 R. Hanburg Brown and R. Q. Twiss
- E-2 Intensity Fluctuations in a GaAs Laser. J. A. Armstrong and A. W. Smith, Phys. Rev. Lett. 14 (1965) 68
- E-3 Measurement of the Fourth-Order Momentum for Non-Gaussian Electromagnetic Fields, M. Bertolotti, B. Daino and F. Gori, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 279
- E-4 Measurement of the Statistical Distribution of Gaussian and Laser Sorce, F. T. Arecchi, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 912
- E-5 Measurement of Amplitude Noise in Optical Cavity Masers, C. Freed and H. A. Haus, App. Phys. Lett. 6

川崎辰夫

(1965) 85

- E-6 Photoelectron Statistics Produced by a Laser Operating below Threshold of Oscillation, C. Freed and H. A. Haus, Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 943
- E-7 High-Order Fluctuations in a Single-Mode Laser Field, F. T. Arecchi, A. Berne and P. Bulamacchi, Phys. Rev. Lett. 16 (1966) 32
- E-8 Laser Photon Counting Distributions near Threshold, A. W. Smith and J. A. Armstrong, Phys. Rev. Lett. 16 (1966) 1169
- E-9 Intensity Fluctuations in GaAs Laser Emission, J. A. Armstrong and A. W. Smith, Phys. Rev. 140 (1965) A155
- E-10 Photocurrent Spectrum and Photoelectron Counts Produced by a Gas Laser, C. Freed and H. A. Haus, Phys. Rev. 14 (1966) 287
- E-11 Observation of Photon Counting Distribution for Laser Light below Threshold, A. W. Smith and J. A. Armstrong, Phys. Lett. 19 (1966) 650
- H-1 Nonlinear Interaction of Laser Modes, H. Haken and H. Sauermann, Z. Physik 173 (1963) 261
- H-2 Frequency Shifts of Laser Modes in Solid State and Gaseous System, H. Haken and H. Sauermann, Z. Physik 176 (1963) 47
- H-3 Theory of Laser Action in Solid-State, Gaseous and Semi-Conductor System, H. Haken and H. Sauermann, Proc. Int. School of Phys. "Enrico Fermi", Course 31
- H-4 A Nonlinear Theory of Laser Noise and Coherence. I. Z. physik 181 (1964) 96,

II. Z. physik 182 (1965) 346,

H. Haken

- H-5 Theory of Coherence of Laser Light, H. Haken, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 329
- H-6 Coherence-Properties of the Statistical Operator in a Laser Model, W. Weidlich and F. Haake, Z. physik 185 (1965) 30
- H-7 Distribution and Correlation Functions for a Laser Amplitude, H. Risken, Z. physik 186 (1965) 85
- H-6 Master-equation for the Statistical Operator of Solid State Laser, W. Weidlich and F. Haake, Z. Physik 186 (1965) 203
- H-8 Dissipation und Fluktuationen in einem Zwei-Niveau-System, H. Sauermann, Z. physik 188 (1965) 480
- H-9 Quantum Noise Operators for the N-Level System, H. Haken and W. Weidlich, Z. physik 189 (1966) 1
- H-10 Quantenmechanische Behandlung des Optischen Masers, H. Sauermann, Z. physik 189 (1966) 312
- H-11 The Fokker-Planck Equation for Quantum Noise of the N-Level System, C. Schmid and H. Risken, Z. Physik 189 365
- H-12 Theory of Intensity and Phase Fluctuations of a Homogeneously Broadened Laser, H. Haken, Z. physik 190 (1966) 327
- H-13 Correlation Function of the Amplitude and of the Intensity Fluctuation for a Laser Model near Threshold, H. Risken, Z. Physik 191 (1966) 302
- H-14 Quantum Fluctuations, Master Equation and Fokker-Planck Equation, H. Risken, C. Schmid and W. Weidlich, z. Phys. 193 (1966) 37



川崎辰夫

- H-15 Fokker-Planck Equation, Distribution and Correlation Functions for Laser Noise, H. Risken, C. Schmid and W. Weidlich, Z. Physik 194 (1966) 337
- H-16 Quantum Theory of Noise in Gas and Solid State Laser with an Inhomogeneously Broadened Line I, V. Arzt, H. Haken, H. Sauermann, C. Schmid and W. Weidlich, Z. Physik 197 (1966) 207
- H-17 Dynamics of Nonlinear Interaction between Radiation and Matter, H. Haken, in Dynamical Processes in Solid State Optics, 1966 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics Part I (1966) 168
- H-18 Quantum-mechanical Solutions of the Laser Master Equation  
I. Z. Physik 201 (1967) 396  
II. Z. Physik 204 (1967) 223
- H-19 The Influence of Higher Order Contributions to the Correlation Function of the Intensity Fluctuation in a Laser near Threshold, H. Risken and H. D. Volmer, Z. Physik 201 (1967) 323
- H-20 Fokker-Planck Equation for Atoms and Light Mode in a Laser Model with Quantum Mechanically Determined Dissipation and Fluctuation Coefficients, H. Risken, C. Schmid and W. Weidlich, Phys. Lett. 20 (1966) 489
- H-21 Theory of Laser Cascades, H. Haken, R. EER Agobin and M. Pauthier, Phys. Rev. 140 (A437) 65
- L-1 Classical Noise I: Fluctuations from the Nonequilibrium Steady State, M. Lax, Rev. Mod. Phys. 32 (1960) 25

# Nonlinearity and Fluctuations

- L-2 II; Influence of Trapping, Diffusion and Recombination on Carrier Concentration Fluctuations, M. Lax and P. Mengert, J. Phys. Chem. Solids 14 (1960) 248.
- L-3 III; Nonlinear Markoff Processes, M. Lax, Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 359
- L-4 IV; Langevin Methods, M. Lax, Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 541
- L-5 V; Noise in Self-Sustained Oscillators, M. Lax, Phys. Rev. 160 (1967) 290
- L-6 VI; Noise in Self-Sustained Oscillators near Threshold, R. D. Hempstead and M. Lax, Phys. Rev. 161 (1967) 350
- L-7 Quantum Noise I; Generalized Mobility Theory, M. Lax, Phys. Rev. 109 (1958) 1921
- L-8 II; Formal Theory of Quantum Fluctuations from a Driven State, M. Lax, Phys. Rev. 129 (1963) 2342
- L-9 III; Quantum Relaxation, the Shape of Lattice Absorption and Inelastic Neutron Scattering Lines, M. Lax, J. Phys. Chem. Solids 25 (1964) 487
- L-10 IV; Quantum Theory of Noise Sources, M. Lax, Phys. Rev. 145 (1966) 110
- L-11 V; Phase Noise in a Homogeneously Broadened Maser, M. Lax, in "Physics of Quantum Electronics" edited by Kelley et al, New York: McGraw-Hill, 1966, pp. 735
- L-12 Quantum Noise VII; The Rate Equations and Amplitude Noise in Laser, M. Lax, IEEE J. of Quant. Elec. QE-3 (1967) 37
- L-13 VIII; Harmonic Oscillator Relaxation from Definite Quantum States, H. Cheng and M. Lax, in "Quantum

川崎辰夫

Theory of Solid State", Per-Olav Lowdin, Ed. New York: Academic Press 1966 pp. 587

L-14 IX; Quantum Fokker-Planck Solution for Laser Noise, M. Lax and W. H. Louisell, IEEE J. Quant. Elec.

QE-3 (1967) 47

L-15 Quantum Theory of Noise in Masers and Lasers, M. Lax, in Dynamical Processes in Solid State Optics, 1966

Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics Part I (1966) 195

L-16 Quantum Noise X; Density-Matrix Treatment of Field and Population-Difference Fluctuations, M. Lax, Phys. Rev. 157 (1967) 213

L-17 XI; Multitime Correspondence between Quantum and Classical Stochastic Processes, M. Lax,